Приложение 4

к образовательной программе

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.02 Дифференциальные и разностные уравнения
(индекс, наименование дисциплины в соответствии с учебным планом)

38.03.01 Экономика
(код, наименование направления подготовки)

Финансы и кредит
(наименование образовательной программы)

Очная, очно-заочная
(форма обучения)

Год набора – 2025

Чебоксары

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 00E49A235532F725E4778E40177F039EE7
Владелец: Ильина Любовь Николаевна
Действителен: с 08.05.2026 до 01.08.2027

Автор(ы)-составитель(и) РПД:

Чекмарев Георгий Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры экономики и менеджмента

Заведующий кафедрой:

Шигильчева Светлана Анатольевна, к.э.н., доцент, заведующий кафедрой экономики и менеджмента

Рабочая программа дисциплины Б1.В.02 Дифференциальные и разностные уравнения одобрена на заседании кафедры экономики и менеджмента Чебоксарского филиала РАНХиГС

протокол № 1 от «05» сентября 2024 г.

актуализирована в соответствии с приказом ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации» от 21 августа 2025 г. № 02-1592 «Об утверждении Положения о порядке разработки, утверждения и актуализации образовательных программ высшего образования – программам бакалавриата, специалитета, магистратуры»

протокол № 3 от «28» октября 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы 4
2. Объем и место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы 5
3. Содержание и структура дисциплины (модуля) 6
4. Типы оценочных материалов, показатели и критерии оценивания 14
5. Формы аттестации, типовые оценочные материалы для текущего контроля успеваемости обучающихся, критерии и шкалы оценивания по контрольным точкам 18
6. Формы промежуточной аттестации, критерии и шкала оценивания, типовые оценочные материалы по дисциплине 27
7. Методические материалы по освоению дисциплины (модуля) 51
8. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети Интернет 53
9. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы 54

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Дисциплина Б1.В.02 Дифференциальные и разностные уравнения обеспечивает формирование у обучающихся следующих профессиональных компетенций:

Код компетенции	**Наименование компетенции**	**Код индикатора достижения компетенций**	**Наименование индикатора достижения компетенций**	**Образовательный результат**
ПКр ОС II - 1	Способен использовать методы решений дифференциальных уравнений для решения прикладных задач	ПКр ОС II - 1.1	Применяет дифференциальные уравнения в целях описания экономических явлений и процессов	*ПКр ОС II - 1.1. З-1.* ***Знает*** теоретические основы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и линейных разностных уравнений (ЛРУ); *ПКр ОС II - 1.1. У-1.* ***Умеет*** применять дифференциальные уравнения как инструмент математического описания естественно-научной картины мира, классифицировать дифференциальные уравнения и выбирать методы их решения.
ПКр ОС II - 1	Способен использовать методы решений дифференциальных уравнений для решения прикладных задач	ПКр ОС II - 1.2	Использует методы решений дифференциальных уравнений для решения прикладных задач	*ПКр ОС II - 1.2. З-1.* ***Знает*** методы решения дифференциальных, разностных и стохастических дифференциальных уравнений; *ПКр ОС II - 1.2. У-1.* ***Умеет*** решать прикладные задачи с использованием дифференциальных, разностных и стохастических дифференциальных уравнений.

2. Объем и место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Общий объем дисциплины:

2,00 з.е., 72 ак. часа

Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий:

По очной форме обучения: 32 ак. часа на контактную работу с преподавателем, из них 16 ак. часов на лекции и 16 ак. часов на практические занятия. 36 ак. часов на самостоятельную работу обучающихся.

По очно-заочной форме обучения: 28 ак. часов на контактную работу с преподавателем, из них 12 ак. час на лекции и 16 ак. часов на практические занятия. 40 ак. часов на самостоятельную работу обучающихся.

Б1.В.02 Дифференциальные и разностные уравнения реализуется на 2-м семестре 1-го курса для студентов очной, очно-заочной ф/о после изучения дисциплин:

- Математический анализ
- Алгебра.

3. Содержание и структура дисциплины (модуля)

3.1. Структура дисциплины (модуля)

Очная форма обучения

№ п/п	Наименование тем и (или) разделов		Объем дисциплины, ак.час											Форма текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации
		ВСЕГО	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий									Самостоятельная работа		
			Период теоретического обучения						Период промежуточной аттестации (сессия)					
			Занятия лекционного типа		Занятия семинарского типа		ИК	КСР	КЭ	Каттэк	Контроль	СРкр	СРэк	СР
			Л	ВЛ	ЛР	ПЗ								
Тема 1.	Экономико-математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. Дифференциальные уравнения первого порядка.	8	2	0	0	2	0	0	0	0		0	0	4	Коллоквиум, Контрольное задание
Тема 2.	Линейные дифференциальн	8	2	0	0	2	0	0	0	0		0	0	4	Коллоквиум, Контрольное

	ые уравнения второго порядка.												задание
Тема 3.	Системы линейных дифференциальных уравнений.	8	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	4	Коллоквиум, Контрольное задание
Тема 4.	Количественный и качественный анализ стационарных систем дифференциальных уравнений	10	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	6	Коллоквиум, Контрольное задание
Тема 5.	Экономико-математические модели, описываемые разностными уравнениями. Разностные уравнения первого порядка.	8	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	4	Коллоквиум, Контрольное задание
Тема 6.	Линейные разностные уравнения второго порядка.	8	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	4	Коллоквиум, Контрольное задание
Тема 7.	Системы линейных разностных	8	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	4	Коллоквиум, Контрольное

	уравнений.													задание
Тема 8.	Количественный и качественный анализ стационарных систем разностных уравнений.	10	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	6	Коллоквиум, Контрольное задание
Промежуточная аттестация		4	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	Зачет
Итого		72	16	0	0	16	0	0	0	4	0	0	36	

Очно-заочная форма обучения

№ п/п	**Наименование тем и (или) разделов**		**Объем дисциплины, ак.час**												**Форма текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации**
		ВСЕГО	**Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий**									**Самостоятельная работа**			
			Период теоретического обучения						**Период промежуточной аттестации (сессия)**						
			Занятия лекционного типа		**Занятия семинарского типа**		**ИК**	**КСР**	**КЭ**	**Каттэк**	**Контроль**	**СРкр**	**СРэк**	**СР**	
			Л	**ВЛ**	**ЛР**	**ПЗ**									

Тема 1.	Экономико-математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. Дифференциальные уравнения первого порядка.	8	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	4	Коллоквиум, Контрольное задание
Тема 2.	Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.	8	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	6	Коллоквиум, Контрольное задание
Тема 3.	Системы линейных дифференциальных уравнений.	10	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	6	Коллоквиум, Контрольное задание
Тема 4.	Количественный и качественный анализ стационарных систем дифференциальных уравнений	10	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	6	Коллоквиум, Контрольное задание
Тема 5.	Экономико-математические модели, описываемые разностными	8	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	4	Коллоквиум, Контрольное задание

	уравнениями. Разностные уравнения первого порядка.													
Тема 6.	Линейные разностные уравнения второго порядка.	8	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	6	Коллоквиум, Контрольное задание
Тема 7.	Системы линейных разностных уравнений.	8	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	4	Коллоквиум, Контрольное задание
Тема 8.	Количественный и качественный анализ стационарных систем разностных уравнений.	8	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	4	Коллоквиум, Контрольное задание
Промежуточная аттестация		4	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	Зачет
Итого		72	12	0	0	16	0	0	0	4	0	0	40	

Используемые сокращения:

Л – лекции - занятия, предусматривающие преимущественную передачу учебной информации обучающимся педагогическими работниками организации и (или) лицами, привлекаемыми организацией к реализации образовательных программ на иных условиях,).

ВЛ – видео лекции.

ЛР – лабораторные работы.

ПЗ – практические занятия (за исключением лабораторных работ).

ИК – индивидуальные консультации.

КСР – контроль самостоятельной работы
КЭ – консультации перед экзаменом
Каттэк – контактная работа на аттестацию в период экзаменационных сессий
СРкр – самостоятельная работа на подготовку курсовой работы/ курсового проекта.
СРэк – самостоятельная работа на подготовку к экзамену.
СР – самостоятельная работа в семестре на подготовку к учебным занятиям.

3.2. Содержание дисциплины

Тема 1. Экономико-математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. Дифференциальные уравнения первого порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2.

Примеры математических моделей в экономике, описываемых дифференциальными уравнениями. Общие понятия для дифференциального уравнения первого порядка (решение уравнения, интегральная кривая, задача Коши для уравнения в нормальной форме). Уравнение первого порядка в дифференциалах и методы его решения (уравнение с разделяющими переменными, однородное уравнение, уравнение в полных дифференциалах). Линейное уравнение первого порядка. Метод вариации постоянной. Уравнение Бернулли.

Тема 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2.

Общие понятия (решение уравнения, начальные значения для уравнения в нормальной форме). Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Понятие о дифференциальных уравнениях высшего порядка. Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частных решений неоднородного уравнения.

Тема 3. Системы линейных дифференциальных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2.

Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, задание начальных значений). Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение). Структура общего решения линейной неоднородной системы. Вариация постоянных. Методы решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Тема 4. Количественный и качественный анализ стационарных систем дифференциальных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2.

Общие понятия и свойства (решение системы, фазовая траектория, положения равновесия, циклы). Устойчивые и неустойчивые положения равновесия. Анализ однородной системы линейных дифференциальных

уравнений с постоянными коэффициентами для случая двух неизвестных. Исследование нелинейных стационарных систем вблизи положений равновесия по линейному приближению.

Тема 5. Экономико-математические модели, описываемые разностными уравнениями. Разностные уравнения первого порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2.

Общие понятия для разностного уравнения первого порядка в нормальной форме (решение уравнения, начальные условия, задачи Коши, решение разностного уравнения подстановкой). Линейное уравнение первого порядка (арифметическая и геометрическая прогрессии, частичные суммы и произведения, метод вариации постоянной).

Тема 6. Линейные разностные уравнения второго порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2.

Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Тема 7. Системы линейных разностных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2.

Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, начальные условия). Решение подстановкой. Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение). Методы решения систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейной неоднородной системы. Частные решения.

Тема 8. Количественный и качественный анализ стационарных систем разностных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2.

Критерии устойчивости нулевого решения линейной однородной системы. Элементы количественного и качественного анализа нелинейных стационарных систем разностных уравнений.

4. Типы оценочных материалов, показатели и критерии оценивания

4.1. Оценочные материалы по дисциплине Б1.В.02 Дифференциальные и разностные уравнения входят в состав оценочных материалов по образовательной программе. Совокупность оценочных материалов по всем дисциплинам (модулям) образовательной программы составляют фонд оценочных средств (далее – ФОС). ФОС используется при проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся с целью оценивания достижения обучающимися планируемых результатов обучения.

4.2. ФОС разработан как комплекс проверочных заданий различного типа и уровня сложности, включает критерии и шкалы оценивания, а также «ключи» правильных ответов. ФОС формируется как отдельный документ и хранится в электронном виде, доступ к ФОС предоставлен ограниченному кругу лиц.

4.3. Для самостоятельной работы обучающихся при подготовке к текущему контролю успеваемости и промежуточной аттестации в рабочих программах дисциплин размещены типовые проверочные задания, которые можно условно разделить на задания закрытого, комбинированного и открытого типов.

Задания закрытого типа — это тестовые задания, в которых каждый вопрос сопровождается готовыми вариантами ответов, из которых необходимо выбрать один или несколько правильных.

Задания комбинированного типа – это тестовые задания, в которых каждый вопрос сопровождается готовыми вариантами ответов, из которых необходимо выбрать один или несколько правильных и обосновать свой выбор.

Задания открытого типа — это задания, в которых на каждый вопрос должен быть предложен развернутый обоснованный ответ.

В зависимости от типа задания рекомендованы определенная последовательность выполнения и система оценивания выполнения заданий.

4.4. Типы заданий, сценарии выполнения, критерии оценивания

ТИП ЗАДАНИЯ	ИНСТРУКЦИЯ	СЦЕНАРИИ ВЫПОЛНЕНИЯ	КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ
Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных	Прочитайте текст, выберите правильный ответ	1.Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов. 2. Внимательно прочитать предложенные вариант-ты ответа. 3. Выбрать один верный ответ. 4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 3 или В).	Ответ считается верным, если правильно указана цифра или буква
Задание закрытого типа на установление соответствия	Прочитайте текст и установите соответствие	1.Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидаются пары элементов. 2. Внимательно прочитать оба списка: список 1 – вопросы, утверждения, факты, понятия и т.д.; список 2 – утверждения, свойства объектов и т.д. 3. Сопоставить элементы списка 1 с элементами списка 2, сформировать пары элементов. 4. Записать попарно буквы и цифры (в зависимости от задания) вариантов ответа (например, А1 или Б4).	Ответ считается верным, если правильно указаны цифры или буквы
Задание закрытого типа с выбором нескольких правильных ответов из	Прочитайте текст, выберите правильные ответы	1.Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается несколько правильных ответов из предложенных вариантов.	Ответ считается верным, если правильно установлены все соответствия (позиции из одного

нескольких вариантов предложенных		2. Внимательно прочитать предложенные вариант-ты ответа. 3. Выбрать несколько правильных ответов. 4. Записать только номера (или буквы) выбранного варианта ответа (например, 1 4 или А Г).	столбца верно сопоставлены с позициями другого)
Задание закрытого типа на установление последовательности	Прочитайте текст и установите последовательность	1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается последовательность элементов. 2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа. 3. Построить верную последовательность из предложенных элементов. 4. Записать буквы/цифры (в зависимости от задания) вариантов ответа в нужной последовательности (например, БВА или 135).	Ответ считается верным, если правильно указана вся последовательность цифр
Задание комбинированного типа с выбором одного правильного ответа из предложенных и обоснованием выбора	Прочитайте текст, выберите правильный ответ и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа	1.Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов. 2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа. 3. Выбрать один верный ответ. 4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа. 5. Записать аргументы, обосновывающие выбор	Ответ считается верным, если правильно указана цифра или буква и приведены корректные аргументы, используемые при выборе ответа

		ответа (например, 4 текст обоснования).	
Задание открытого типа с развернутым ответом	Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ	1. Внимательно прочитать текст задания и понять суть вопроса. 2.Продумать логику и полноту ответа. 3.Записать ответ, используя четкие компактные формулировки. 4.В случае расчетной задачи, записать решение и ответ	Ответ считается верным: 1. Отсутствие фактических ошибок. 2. Раскрытие объема используемых понятий (полнота ответа). 3.Обоснованность ответа (наличие аргументов). 4. Логическая последовательность излагаемого материала.

4.5. Общая шкала оценивания результатов текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся с применением БРС

Итоговая балльная оценка	Традиционная система	Бинарная система	ECTS	
			Для традиционной системы	Для бинарной системы
95-100	Отлично	Зачтено	A	P/ Passed
85-94			B	P/ Passed
75-84	Хорошо		C	P/ Passed
65-74			D	P/ Passed
55-64	Удовлетворительно		E	P/ Passed
0-54	Неудовлетворительно	Не зачтено	F	F/Failed

Соотношение баллов за текущий контроль успеваемости и промежуточную аттестацию, а также повторную промежуточную аттестацию:

Максимальная сумма баллов за текущий контроль успеваемости	Максимальная сумма баллов за промежуточную аттестацию	Максимальная итоговая балльная оценка	Максимальная сумма баллов за повторную промежуточную аттестацию
60 баллов	40 баллов	100 баллов	100 баллов

5. Формы аттестации, типовые оценочные материалы для текущего контроля успеваемости обучающихся, критерии и шкалы оценивания по контрольным точкам

5.1. В ходе реализации дисциплины Б1.В.02 Дифференциальные и разностные уравнения используются следующие формы текущего контроля успеваемости обучающихся (в том числе, задания к контрольным точкам):

коллоквиум, контрольное задание.

5.2. Типовые оценочные материалы для текущего контроля успеваемости обучающихся (вне контрольных точек):

Тема 1. Экономико-математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. Дифференциальные уравнения первого порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2.

Контрольные задания:

1. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y' = \frac{y-2}{x+3}, y(1) = 2$

2. Найти общее решение: $\frac{x^2 + y^2}{xy} = y'$

3. Найти общее решение: $(4x^3 + 6xy^2)dx + (6x^2y + e^y)dy = 0$

Вопросы к коллоквиуму:

№ п.п.	Содержание вопроса
1.	Примеры математических моделей в экономике, описываемых дифференциальными уравнениями. Общие понятия для дифференциального уравнения первого порядка (решение уравнения, интегральная кривая, задача Коши для уравнения в нормальной форме)
2.	Уравнение первого порядка в дифференциалах и методы его решения (уравнение с разделяющими переменными, однородное уравнение, уравнение в полных дифференциалах)
3.	Линейное уравнение первого порядка. Метод вариации постоянной. Уравнение Бернулли

Тема 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

Контрольные задания:

1. Найти общее решение: $y''' + 5y'' + 4y' = 0$
2. Найти общее решение: $y'' - 2y' = 2x - 8$
3. Найти общее решение: $y'' + 4y' + 5y = 40\cos 3x$

Вопросы к коллоквиуму:

№ п.п.	Содержание вопроса
1.	Общие понятия (решение уравнения, начальные значения для уравнения в нормальной форме). Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Понятие о дифференциальных

	уравнениях высшего порядка
2.	Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения.
3.	Методы нахождения частных решений неоднородного уравнения

Тема 3. Системы линейных дифференциальных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

Контрольные задания:

1. Методом исключения найти общее решение системы $(y = y(x), z = z(x))$: $\begin{cases} y' = 1 + 4x - 2y - 4z, \\ z' = \frac{3}{2}x^2 - y + z. \end{cases}$

2. Найти общее решение системы: $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$

Вопросы к коллоквиуму:

№ п.п.	Содержание вопроса
1.	Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, задание начальных значений)
2.	Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение)
3.	Структура общего решения линейной неоднородной системы. Вариация постоянных. Методы решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Тема 4. Количественный и качественный анализ стационарных систем дифференциальных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

Контрольные задания:

1. Найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 \end{cases}$

2. Определить тип особой точки и нарисовать траекторию на плоскости (x, y): $\begin{cases} \dot{x} = y + x - 4 \\ \dot{y} = 3y - x \end{cases}$

3. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение: $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^{y} \end{cases}$

Вопросы к коллоквиуму:

№ п.п.	Содержание вопроса
1.	Общие понятия и свойства (решение системы, фазовая траектория, положения равновесия, циклы). Устойчивые и неустойчивые положения равновесия
2.	Анализ однородной системы линейных дифференциальных уравнений с посто-янными коэффициентами для случая двух неизвестных
3.	Исследование нелинейных стационарных систем вблизи положений равновесия по линейному приближению

Тема 5. Экономико-математические модели, описываемые разностными уравнениями. Разностные уравнения первого порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

Контрольные задания:

1. Решить разностное линейное уравнение первого порядка:

$$y(k+1) = \frac{k+2}{k+1} y(k) + \frac{2}{k+3}$$

2. Решить линейное разностное стационарное уравнение первого порядка:

$$y(k+1) + 2y(k) = 3k^2 + 2k - 2$$

Вопросы к коллоквиуму:

№ п.п.	Содержание вопроса
1.	Общие понятия для разностного уравнения первого порядка в нормальной форме (решение уравнения, начальные условия, задачи Коши, решение разностного уравнения подстановкой)
2.	Линейное уравнение первого порядка (арифметическая и геометрическая прогрессии, частичные суммы и произведения,

	метод вариации постоянной)

Тема 6. Линейные разностные уравнения второго порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

Контрольные задания:

1. Решить линейное однородное разностное стационарное уравнение второго порядка: $y(k+2)+y(k+1)-2y(k)=0$

2. Решить линейное неоднородное разностное стационарное уравнение второго порядка: $y(k+2)-y(k)=\cos k$

Вопросы к коллоквиуму:

№ п.п.	Содержание вопроса
1.	Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами
2.	Структура общего решения линейного неоднородного уравнения
3.	Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

Тема 7. Системы линейных разностных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

Контрольные задания:

1. Решить линейную однородную стационарную систему разностных уравнений второго порядка: $\begin{cases} x(k+1)=-6x(k)+8y(k), \\ y(k+1)=-4x(k)+6y(k). \end{cases}$

2. Решить линейную неоднородную стационарную систему разностных уравнений: $\begin{cases} x(k+1)=-2x(k)-y(k)+7k-1, \\ y(k+1)=-4x(k)-5y(k)+2. \end{cases}$

3. Найти решение разностной задачи Коши:

$$\begin{cases} x(k+1)=3x(k)+y(k)+2k+2, \\ y(k+1)=2x(k)+4y(k)+2k+1, \\ x(0)=y(0)=0. \end{cases}$$

Вопросы к коллоквиуму:

№ п.п.	Содержание вопроса
1.	Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, начальные условия)
2.	Решение подстановкой
3.	Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение)
4.	Методы решения систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами
5.	Структура общего решения линейной неоднородной системы. Частные решения

Тема 8. Количественный и качественный анализ стационарных систем разностных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

Контрольные задания:

1. Исследовать устойчивость положений равновесия нелинейных систем разностных уравнений: $\begin{cases} x(k+1) = x(k) - 4y(k) + 2x(k)y(k) - 8, \\ y(k+1) = y(k) + 4y^2(k) - x^2(k). \end{cases}$

2. Исследовать ограниченность решений системы разностных уравнений: $\begin{cases} x(k+1) = -\frac{1}{2}y(k) + \cos k\,, \\ y(k+1) = y(k) + y(k) + \sin k\,. \end{cases}$

Вопросы к коллоквиуму:

№ п.п.	Содержание вопроса
1.	Критерии устойчивости нулевого решения линейной однородной системы
2.	Элементы количественного и качественного анализа нелинейных стационарных систем разностных уравнений

5.3. Один или несколько тематических блоков дисциплины завершаются контрольной точкой (далее – КТ). Текущий контроль успеваемости по дисциплине предусматривает не менее 2 (двух) и не более 10 (десяти) КТ в течение периода освоения дисциплины.

Максимальное количество баллов за любой тип работ в рамках КТ

составляет 100 (сто) баллов.

Распределение весовых коэффициентов по КТ в рамках текущего контроля успеваемости по дисциплине и формулы расчета:

Наименование контрольной точки	Максимальное количество баллов за работу в рамках КТ, которое может набрать обучающийся	Коэффициент веса контрольной точки	Результат контрольной точки, участвующий в формировании итоговой балльной оценки по дисциплине (отражается в журнале БРС в СДО)
КТ 1	100	0,3	30
КТ 2	100	0,3	30
Итого:	х	0,6	60

Формула расчета результата контрольной точки:

Результат контрольной точки = Количество баллов за работу в рамках КТ х Коэффициент веса контрольной точки.

5.4. Формы текущего контроля успеваемости обучающихся в рамках КТ и типовые оценочные материалы:

КТ – 1.

Тема 1-8.

Контрольные задания:

Задание 1. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

Задание 2. Для системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

найти стационарные точки и исследовать их устойчивость.

Задание 3. Решить систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{t+1} = 3x_n + 2y_n \end{cases}$$

Задание 4. Для системы:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 0{,}5x_t + y_t \\ y_{t+1} = -0{,}5x_t + 2y_t \end{cases}$$

найти стационарную точку и определить, является ли она устойчивой.

Задание 5. Составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение объёма производства в модели естественного роста с ограничением (логистическая кривая). Пояснить смысл коэффициентов.

Критерии оценивания контрольных заданий:

Диапазон баллов	Описание критерия
85-100	Обучающимся задание выполнено без ошибок и в полном объеме.
65-84	Обучающимся в целом задание выполнено, имеются отдельные неточности или недостаточно полные ответы, не содержащие ошибок.
55-64	Обучающимся допущены отдельные ошибки при выполнении задания
0-54	У обучающегося отсутствуют ответы на большинство вопросов задачи, задание не выполнено или выполнено не верно.

КТ – 2.

Тема 1, 2, 5, 6.

Опрос:

Вопросы для опроса:

№ п.п.	Содержание вопроса
1.	Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка. Приведите пример экономической задачи, которая сводится к такому уравнению (назовите модель и поясните, что обозначают переменные).
2.	Чем отличается общее решение от частного решения дифференциального уравнения? Что такое начальное условие и какова его роль в экономическом моделировании?
3.	Перечислите основные типы дифференциальных уравнений первого порядка, которые можно решить аналитически. Для одного из типов кратко опишите метод решения.
4.	Что такое характеристическое уравнение для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами? Как по виду его корней определяется форма общего решения однородного уравнения?

5.	Дайте определение разностного уравнения первого порядка. Приведите пример экономической модели с дискретным временем, описываемой таким уравнением (например, модель динамики долга или запаса).
6.	Объясните понятие «стационарное решение» (равновесное состояние) для разностного уравнения. Как экономически можно интерпретировать это состояние?
7.	В чём состоит принципиальное отличие в подходе к решению линейных разностных уравнений второго порядка от разностных уравнений первого порядка? Какая дополнительная информация нужна для нахождения частного решения?
8.	Какая существует связь между дифференциальными и разностными уравнениями при моделировании экономических процессов? Когда уместнее использовать каждую из этих моделей?

Критерии оценивания опроса:

Диапазон баллов	Описание критерия
85-100	Обучающийся полно излагает материал (отвечает на вопрос), дает правильное определение основных понятий; обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные; излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.
65-84	Обучающийся дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «отлично», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.
55-64	Обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.
0-54	Обучающийся обнаруживает незнание вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и

	неуверенно излагает материал.

6. Формы промежуточной аттестации, критерии и шкала оценивания, типовые оценочные материалы по дисциплине

6.1. Промежуточная аттестация (зачет) проводится в письменной форме. Обучающийся получает экзаменационный билет с вариантами задач. Обучающийся получает чистые маркированные листы бумаги для записей решения задач, затем приступает к решению. Необходимо дать ответ в письменном виде, подробно изложив ход решения, при необходимости завершить решение выводами.

6.2. Типовые оценочные материалы промежуточной аттестации

Типовые проверочные задания для самоподготовки обучающегося к промежуточной аттестации:

Тема 1. Экономико-математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. Дифференциальные уравнения первого порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

1. Задания открытого типа.

1.1. Вопросы открытого типа.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ:

№ п.п.	Вопрос
1.	Примеры математических моделей в экономике, описываемых дифференциальными уравнениями. Общие понятия для дифференциального уравнения первого порядка (решение уравнения, интегральная кривая, задача Коши для уравнения в нормальной форме)
2.	Уравнение первого порядка в дифференциалах и методы его решения (уравнение с разделяющими переменными, однородное уравнение, уравнение в полных дифференциалах)
3.	Линейное уравнение первого порядка. Метод вариации постоянной. Уравнение Бернулли

1.2. Контрольные задания.

Задание 1.
Решить задачу Коши $y' = -2ty,\ \ y(1) = 2.$

Задание 2.
Найти все решения уравнения $y' + 2ty = t^2$

2. Задания комбинированного типа:

2.1. Тестовые задания с обоснованием выбора.

№ п.п.	Содержание задания	Правильный ответ	Аргументы, обосновывающие выбор ответа
1.	Сколько произвольных постоянных содержит общее решение дифференциального уравнения первого порядка? Варианты ответов: а) 0 б) 1 в) 2 г) Зависит от уравнения		
2.	Частное решение дифференциального уравнения получается из общего: Варианты ответов: а) Приданием произвольной постоянной конкретного значения б) Добавлением ещё одной постоянной в) Интегрированием ещё раз г) Дифференцированием общего решения		

3. Задания закрытого типа.

3.1. Тестовые задания.

Тест 1.

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.
3. Выбрать один верный ответ.
4. Записать только букву выбранного варианта ответа (а)).

Укажите тип дифференциального уравнения $(2x+1)y' + y = x$:
а) с разделяющимися переменными;
б) однородное;
в) линейное;
г) Бернулли;
д) в полных дифференциалах;
е) другой тип.

Укажите общее решение дифференциального уравнения $(2x+1)dy + y^2dx = 0$:
а) $y = 2\ \ln|2x+1| + C$;
б) $y = \ln|2x + C|$;
в) $y = \frac{-1}{2x-C}$:
г) $y = \frac{2}{2\ \ln|2x+1|+C}$;
д) $y = \frac{1}{\ln|2x+C|}$:
е) $y = 3\ \ln|x|$.

Укажите частное решение дифференциального уравнения $y' + 2y = 4$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 5$:
а) $y = e^{-2x} + 5$;
б) $y = \ln|C - 2x|$;
в) $y = 5 - 2x$;
г) $y = 3e^{-2x} + 2$;
д) $y = e^{C-2x} + 2$;
е) $y = 5e^{2x}$

Среди перечисленных дифференциальных уравнений укажите однородное уравнение:

а) $2xyy' - y^2 + x = 0$;

б) $y' + \sqrt{xy} = 0$;

в) $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$;

г) $xy' = y(1 + \ln x - \ln y)$;

д) $xy'' = y'$

Тема 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

1. Задания открытого типа.

1.1. Вопросы открытого типа.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ:

№ п.п.	Вопрос
1.	Общие понятия (решение уравнения, начальные значения для уравнения в нормальной форме). Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Понятие о дифференциальных уравнениях высшего порядка
2.	Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения.
3.	Методы нахождения частных решений неоднородного уравнения

1.2. Контрольные задания.

Задание 1.

Найти общее решение дифференциального уравнения $4y'' - 11y' + 6y = 0$

Задание 2.

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 37y = 0$

2. Задания комбинированного типа.

2.1. Тестовые задания с обоснованием выбора.

№ п.п.	Содержание задания	Правильный ответ	Аргументы, обосновывающие выбор ответа
1.	Уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ называется линейным, потому что: Варианты ответов: а) Оно содержит только первую производную б) Функции y, y', y'' входят в него в первой степени и не перемножаются в) Его можно решить графически г) Оно всегда имеет решение		
2.	Общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка представляет собой сумму: Варианты ответов: а) Двух произвольных функций б) Общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного в) Общего решения однородного уравнения и определённого частного решения неоднородного г) Двух частных решений однородного уравнения		

3. Задания закрытого типа.

3.1. Тестовые задания.

Тест 1.

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается несколько правильных ответов из предложенных вариантов.

2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.

3. Выбрать несколько правильных ответов.

4. Записать только буквы выбранного варианта ответа (например, а), в)).

Среди приведенных дифференциальных уравнений укажите все, порядок которых можно понизить подстановкой $y' = z(x)$:

а) $y'' = y' + x$;

б) $y'' = y' + y$;

в) $y''y'y = y^2 + 1$;

г) $y''y'x = x^2 + 1$;

д) $y'y = 2$.

Среди приведенных дифференциальных уравнений укажите все, порядок которых можно понизить подстановкой $y' = p(y)$:

а) $y'' = y' + x$;

б) $y'' = y' + y$;

в) $y''y'y = y^2 + 1$;

г) $y''y'x = x^2 + 1$;

д) $y'y = 2$.

Тест 2.

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.

2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.

3. Выбрать один верный ответ.

4. Записать только букву выбранного варианта ответа (а)).

Какое уравнение получится после понижения порядка дифференциального уравнения $y'' = (y')^2 + y$?:

а) $\frac{dp}{dy} = p^2 + y$;
б) $\frac{dp}{dy} = p + \frac{y}{p}$;
в) $\frac{dz}{dx} = z^2 + x$;
г) $\frac{dz}{dx} = z + \frac{x}{z}$;
д) $\frac{dy}{dx} = y + 1$

Укажите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$:
а) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$;
б) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$;
в) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{-2x}$;
г) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$;
д) $y = Ce^{2x}$;
е) другой ответ.

Тема 3. Системы линейных дифференциальных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

1. Задания открытого типа.

1.1. Вопросы открытого типа.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ:

№ п.п.	Вопрос
1.	Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, задание начальных значений)
2.	Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение)
3.	Структура общего решения линейной неоднородной системы. Вариация постоянных. Методы решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1.2. Контрольные задания.

Задание 1.

Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y, \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$

Задание 2.

Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t \end{cases}$

2. Задания комбинированного типа.

2.1. Тестовые задания с обоснованием выбора.

№ п.п.	Содержание задания	Правильный ответ	Аргументы, обосновывающие выбор ответа
1.	Решите систему методом исключения: $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$ Исключив y, получим уравнение для x: Варианты ответов: а) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$ б) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$ в) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$ г) $\ddot{x} - 4 + 2x = 0$		
2.	Найдите общее решение системы: $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 3x + 2y \end{cases}$ Варианты ответов: а) $x = 2C_1e^{4t} + C_2e^{-t}, y = 3C_1e^{4t} - C_2e^{-t}$ б) $x = C_1e^{4t} + C_2e^{-t}, y = C_1e^{4t} + 3C_2e^{-t}$ в) $x = C_1e^{4t} + C_2e^{-t}, y = 2C_1e^{4t} - \frac{1}{2}C_2e^{-t}$ г) $x = 2C_1e^{4t} + C_2e^{-t}, y = 3C_1e^{4t} + C_2e^{-t}$		

3. Задания закрытого типа.

3.1. Тестовые задания.

Тест 1.

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.

2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.

3. Выбрать один верный ответ.

4. Записать только букву выбранного варианта ответа (а)).

Система дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$ может быть сведена к уравнению:

а) $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0;$

б) $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0;$

в) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0$

г) $\frac{d^2y}{dt^2} - 3y = 0.$

Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + 6x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$ характеристическим уравнением будет:

а) $\lambda^2 - 16 = 0;$

б) $\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0;$

в) $\lambda^2 + 6\lambda - 16 = 0;$

г) $\lambda^2 - 6\lambda + 16 = 0.$

Корнями характеристического уравнения системы $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x + z \end{cases}$ являются:

а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1;$

б) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2;$

в) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$;
г) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$

Решением системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ является система функции:

а) $\begin{cases} x = C_1 \cos 6t - C_2 \sin 6t, \\ y = C_2 \cos t + C_1 \sin t \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x = 4C_1 e^{-6t} - C_2 e^{t}, \\ y = C_1 e^{6t} + C_2 e^{t} \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x = 2C_1 e^{-6t} - 4C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^{-6t} + C_2 e^{-t} \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-6t}, \\ y = C_1 e^{-6t} + C_2 \end{cases}$.

Тема 4. Количественный и качественный анализ стационарных систем дифференциальных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

1. Задания открытого типа.

1.1. Вопросы открытого типа.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ:

№ п.п.	Вопрос
1.	Общие понятия и свойства (решение системы, фазовая траектория, положения равновесия, циклы). Устойчивые и неустойчивые положения равновесия
2.	Анализ однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для случая двух неизвестных
3.	Исследование нелинейных стационарных систем вблизи положений равновесия по линейному приближению

1.2. Контрольные задания.

Задание 1.

Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость $\begin{cases} x' = \ln(-x + y^2), \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$.

Задание 2.

Исследовать на устойчивость нулевое решение системы $\begin{cases} \dot{x} = e^{x} - e^{-3z}, \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x + y), \\ \dot{z} = \ln(1 + z - 3x) \end{cases}$.

2. Задания комбинированного типа.

2.1. Тестовые задания с обоснованием выбора.

№ п.п.	Содержание задания	Правильный ответ	Аргументы, обосновывающие выбор ответа
1.	Если собственные значения матрицы Якоби в стационарной точке — вещественные числа одного знака, то точка является: Варианты ответов: а) Седлом б) Узлом (устойчивым или неустойчивым) в) Фокусом г) Центром		
2.	Классификация стационарной точки для линейной системы $\dot{x}Ax$ определяется: Варианты ответов: а) Определителем матрицы A б) Следом матрицы A в) Собственными значениями матрицы A		

	г) Обратной матрицей A^{-1}		

3. Задания закрытого типа.

3.1. Тестовые задания.

Тест 1.

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.

2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.

3. Выбрать один верный ответ.

4. Записать только букву выбранного варианта ответа (а)).

Найдите стационарные точки системы: $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x^2 - 1 \end{cases}$

а) (1,1), (-1,-1)

б) (1,1), (-1,1)

в) (1,1), (1,-1)

г) (-1,-1), (1,-1)

Найдите собственные значения матрицы Якоби для системы в точке (0,0): $\dot{x} = -2x + y, \dot{y} = x - 2y$

а) -1, -3

б) -1, 1

в) -3, 1

г) -1, -1

Определите тип стационарной точки (0,0) для системы: $\dot{x} = 3x - y, \dot{y} = x + y$

а) Устойчивый узел

б) Неустойчивый узел

в) Седло

г) Устойчивый фокус

Система $\dot{x} = y, \dot{y} = -x - y$имеет стационарную точку (0,0) . Её тип:

а) Устойчивый фокус

б) Неустойчивый фокус

в) Устойчивый узел

г) Седло

Тема 5. Экономико-математические модели, описываемые разностными уравнениями. Разностные уравнения первого порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

1. Задания открытого типа.

1.1. Вопросы открытого типа.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ:

№ п.п.	Вопрос
1.	Общие понятия для разностного уравнения первого порядка в нормальной форме (решение уравнения, начальные условия, задачи Коши, решение разностного уравнения подстановкой)
2.	Линейное уравнение первого порядка (арифметическая и геометрическая прогрессии, частичные суммы и произведения, метод вариации постоянной)

1.2. Контрольные задания.

Задание 1.

Решить линейное разностное уравнение первого порядка $x(t+1) - \frac{t+1}{t+2}x(t) = \frac{2}{t+2}$

Задание 2.

Решить линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами $x(t+1) + 2x(t) = 3t^2 + 2t - 2$

2. Задания комбинированного типа.

2.1. Тестовые задания с обоснованием выбора.

№ п.п.	Содержание задания	Правильный ответ	Аргументы, обосновывающие выбор ответа
1.	Общее решение		

	линейного неоднородного уравнения первого порядка равно: Варианты ответов: а) Частному решению однородного уравнения б) Сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного в) Только частному решению неоднородного уравнения г) Произведению двух решений		
2.	Если $a_k = 1$ для всех k, то уравнение $y_{k+1} + ay_k = f_k$ называется: Варианты ответов: а) нестационарным, б) стационарным, в) нелинейным, г) автономным.		

3. Задания закрытого типа.

3.1. Тестовые задания.

Тест 1.

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.

2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.

3. Выбрать один верный ответ.

4. Записать только букву выбранного варианта ответа (а)).

Как называется задача нахождения решения уравнения $y_{k+1} + a_k y_k = f_k$, удовлетворяющего начальному условию $y_0 = u \in \mathbb{R}$?

а) разностная задача Коши;

б) задача Эйлера;

в) задача Коши;

г) задача Лиувилля.

Что является решением линейного разностного уравнения первого порядка $y_{k+1} + a_k y_k = f_k$?

а) вектор;

б) функция;

в) число;

г) последовательность.

Если $a_k = a = const$ и $f_k = 0$, то уравнение $y_{k+1} + a y_k = 0$ называется:

а) нестационарным,

б) стационарным,

в) нелинейным,

г) автономным.

Как называется метод решения неоднородного уравнения $y_{k+1} + a y_k = f_k$ с постоянными коэффициентами, основанный на подборе вида решения, похожего на правую часть?

а) метод исключения,

б) метод неопределённых коэффициентов,

в) метод характеристического уравнения,

г) метод Лагранжа.

Тема 6. Линейные разностные уравнения второго порядка. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

1. Задания открытого типа.

1.1. Вопросы открытого типа.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ:

№ п.п.	Вопрос
1.	Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения

	линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами
2.	Структура общего решения линейного неоднородного уравнения
3.	Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

1.2. Контрольные задания.

Задание 1.
Найти общее решение уравнения:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$$

Задание 2.
Решить задачу Коши:

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 4n + 1, y_0 = 1, y_1 = 0$$

2. Задания комбинированного типа.

2.1. Тестовые задания с обоснованием выбора.

№ п.п.	Содержание задания	Правильный ответ	Аргументы, обосновывающие выбор ответа
1.	Как выглядит характеристическое уравнение для однородного разностного уравнения $y_{k+2} + py_{k+1} + qy_k = 0$? Варианты ответов: а) $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ б) $\lambda^2 + p\lambda + q\lambda = 0$ в) $y^2 + py + q = 0$ г) $\lambda^2 + p\lambda - q = 0$		
2.	Если корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 являются действительными и отличными друг от друга ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), то общее решение ЛОРУ имеет		

	вид: Варианты ответов: а) yk = $C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2$ б) yk = $C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k$ в) yk = $(C_1 + C_2 k) \lambda_1^k$ г) yk = $C_1 \lambda_1^k \cdot C_2 \lambda_2^k$		

3. Задания закрытого типа.

3.1. Тестовые задания.

Тест 1.

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.

2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.

3. Выбрать один верный ответ.

4. Записать только букву выбранного варианта ответа (а)).

Если $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \dots, \varphi_{nk}$ – фундаментальная система решений уравнения $y_{k+n} + a_{1k} y_k + n - 1 + \dots + a_{n-1,k} y_k + 1 + a_{nk} y_k = 0$, то что задает формула $C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_{2k} + \dots + C_n \varphi_{nk}$, где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные, $k \in N_0$?

а) решение неоднородного разностного уравнения,

б) случайное решение,

в) общее решение,

г) частное решение.

Решения $y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}$ ЛОРУ $y_{k+n} + a_{1k} y_k + n - 1 + \dots + a_{n-1,k} y_k + 1 + a_{nk} y_k = 0$, линейно независимы на множестве N_0 тогда и только тогда, когда:

а) $D(y_{1k}, \dots, y_{nk}) < 0$ для всех $k \in N_0$,

б) $D(y_{1k}, \dots, y_{nk}) \neq 0$ для всех $k \in N_0$,

в) $D(y_{1k}, \dots, y_{nk}) > 0$ для всех $k \in N_0$,

г) $D(y_{1k}, \dots, y_{nk}) = 0$ для всех $k \in N_0$.

Если $y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{mk}$ – решения ЛОРУ $y_{k+n} + a_{1k}y_k + n - 1 + \cdots + a_{n-1,k}y_k + 1 + a_{nk}y_k = 0$, то что можно сказать о линейной комбинации $y_k = C_1y_{1k} + C_2y_{2k} + \cdots + C_my_{mk}$, где $C_1, C_2, \dots, C_m \in Y (Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$?

а) является решением неоднородного уравнения,

б) может быть решением этого однородного уравнения, а может и не быть им,

в) равна нулю,

г) является решением этого линейного однородного разностного уравнения.

Как называется уравнение $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, построенное для ЛОРУ $y_{k+n} + a_1y_{k+n-1} + \cdots + a_ny_k = 0$?

а) стационарное уравнение,

б) характеристическое уравнение,

в) определяющее уравнение,

г) автономное уравнение.

Тема 7. Системы линейных разностных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

1. Задания открытого типа.

1.1. Вопросы открытого типа.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ:

№ п.п.	Вопрос
1.	Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, начальные условия)
2.	Решение подстановкой
3.	Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение)
4.	Методы решения систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами
5.	Структура общего решения линейной неоднородной системы. Частные решения

1.2. Контрольные задания.

Задание 1.

Решить систему:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n, \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n. \end{cases}$$

Задание 2.

Решить систему:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n, \\ y_{n+1} = x_n - y_n. \end{cases}$$

2. Задания комбинированного типа.

2.1. Тестовые задания с обоснованием выбора.

№ п.п.	Содержание задания	Правильный ответ	Аргументы, обосновывающие выбор ответа
1.	В каком виде записывается однородная система линейных разностных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами в матричной форме? Варианты ответов: а) X(t+1) = A ·X(t) б) X(t+1) = A + X(t) в) X(t) = A ·X(t+1) г) X(t+1) = X(t)^A		
2.	Если характеристическое уравнение системы 2-го порядка имеет два различных действительных корня λ1 = 3 и λ2 = 0.5, то общее решение для любой компоненты системы (например, x(t)) будет иметь вид:		

	Варианты ответов: а) x(t) = C1 ·3 + C2 ·0.5 б) x(t) = C1 ·3^t + C2 ·0.5^t в) x(t) = (C1 + C2 t) ·3^t г) x(t) = C1 ·3^t ·C2 ·0.5^t		

3. Задания закрытого типа.

3.1. Тестовые задания.

Тест 1.

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.

2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.

3. Выбрать один верный ответ.

4. Записать только букву выбранного варианта ответа (а)).

Дана система: $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$. Начальные условия: x_0=3, y_0=1. Чему равен y_2?

а) 2,

б) 5,

в) 8,

г) 10.

Система задана уравнениями: $x_{n+1} = 0{,}5x_n + 2y_n + 1, y_{n+1} = x_n - y_n + 3$. Чтобы найти её стационарную точку (x*, y*), необходимо решить систему уравнений:

а) $0{,}5x_n + 2y_n + 1 = 0, x_n - y_n + 3 = 0,$

б) $x^* = 0{,}5x^* + 2y^* + 1, y^* = x^* - y^* + 3,$

в) $x_{n+1} + x_n = 0, y_{n+1} + y_n = 0,$

г) $\det A = 0.$

Дана система: $\begin{cases} 2_{n+1} = 2q_n \\ q_{n+1} = p_n - q_n \end{cases}$. Начальные условия: p_0=4, q_0=-1. Чему равен p_2?

а) 2

б) -4

в) -2

г) 0

Система задана уравнениями: $x_{n+1} = 0{,}5x_n + y_n + 4, y_{n+1} = x_n + 0{,}5y_n - 2$. Найдите её стационарную точку (x*, y*).

а) (2, 3)

б) (4, -2)

в) (4, 2)

г) (0, 0)

Тема 8. Количественный и качественный анализ стационарных систем разностных уравнений. ПКр ОС II - 1.1, ПКр ОС II - 1.2

1. Задания открытого типа.

1.1. Вопросы открытого типа.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ:

№ п.п.	Вопрос
1.	Критерии устойчивости нулевого решения линейной однородной системы
2.	Элементы количественного и качественного анализа нелинейных стационарных систем разностных уравнений

1.2. Контрольные задания.

Задание 1.

Задание 1.

Исследовать устойчивость положений равновесия нелинейных систем разностных уравнений: $\begin{cases} x(k+1) = x(k) - 4y(k) + 2x(k)y(k) - 8, \\ y(k+1) = y(k) + 4y^2(k) - x^2(k). \end{cases}$

Задание 2.

Исследовать ограниченность решений системы разностных уравнений: $\begin{cases} x(k+1) = -\frac{1}{2}y(k) + \cos k\,, \\ y(k+1) = y(k) + y(k) + \sin k\,. \end{cases}$

2. Задания комбинированного типа.

2.1. Тестовые задания с обоснованием выбора.

№ п.п.	Содержание задания	Правильный ответ	Аргументы, обосновывающие выбор ответа
1.	Какое условие на собственные значения матрицы коэффициентов A линейной однородной системы $x_{t+1}=Ax_t$ гарантирует асимптотическую устойчивость стационарной точки $x^*=0$? Варианты ответов: а) Все собственные значения по модулю равны 1 б) Все собственные значения по модулю больше 1 в) Все собственные значения по модулю меньше 1 г) Собственные значения действительные и положительные		
2.	Уравнение: $x_{t+1}=0,6x_t$. Начальное условие: $x_0=100$. Что будет с решением при больших t? Варианты ответов: а) Растёт неограниченно б) Стремится к нулю в) Остаётся постоянным г) Колеблется		

3. Задания закрытого типа.

3.1. Тестовые задания.

Тест 1.

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.

2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.

3. Выбрать один верный ответ.

4. Записать только букву выбранного варианта ответа (а)).

Система задана уравнениями: $\begin{cases} x_{t+1} = 0{,}5x_t + 0{,}2y_t \\ y_{t+1} = -0{,}1x_t + 0{,}8y_t \end{cases}$

а) Устойчивым узлом

б) Неустойчивым узлом

в) Седлом

г) Устойчивым фокусом

Для системы $x_{t+1} = Ax_t$ известно, что определитель матрицы A равен 0.7, а след равен 1.5. Что можно сразу заключить о стационарной точке 0?

а) Она асимптотически устойчива

б) Она неустойчива

в) Она является седлом

г) По этим данным нельзя однозначно определить тип устойчивости

Система разностных уравнений задана матрицей перехода:$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ -0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Что можно сказать о собственных значениях матрицы и типе стационарной точки (0,0)?

а) Оба собственных значения действительные, положительные, меньше 1 → устойчивый узел

б) Собственные значения комплексные с положительной действительной частью → неустойчивый фокус

в) Собственные значения комплексные, модуль меньше 1 → устойчивый фокус

г) Один корень больше 1 по модулю, другой меньше 1 → седло

Уравнение: $p_{t+1} = -0{,}8p_t$. Начальное условие: $p_0 = 10$. Как ведёт себя решение?

а) Монотонно убывает до нуля

б) Колеблется, приближаясь к нулю

в) Растёт неограниченно

г) Колеблется с постоянной амплитудой

6.3. Критерии и шкала оценивания на основе БРС.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ	РЕЗУЛЬТАТ В БАЛЛАХ
Дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, самостоятельно, и исчерпывающе отвечает на дополнительные вопросы, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса, решил предложенные практические задания без ошибок	40
Дан развернутый ответ на поставленный вопрос, где обучающийся демонстрирует знания, приобретенные на лекционных и семинарских занятиях, а также полученные посредством изучения обязательных учебных материалов по курсу, дает аргументированные ответы, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе. Решил предложенные практические задания с небольшими неточностями.	30-39
Дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, слабо сформированными навыками анализа явлений, процессов, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа. Допускается несколько ошибок в содержании ответа и решении практических заданий.	20-29
Дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, несформированными навыками анализа явлений, процессов, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Выводы поверхностны. Решение практических заданий не выполнено, т.е. обучающийся не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.	0-19

7. Методические материалы по освоению дисциплины (модуля)

Подготовка к лекциям.

Главное в период подготовки к лекционным занятиям – научиться методам самостоятельного умственного труда, сознательно развивать свои творческие способности и овладевать навыками творческой работы. Для этого необходимо строго соблюдать дисциплину учебы и поведения. Четкое планирование своего рабочего времени и отдыха является необходимым условием для успешной самостоятельной работы. В основу его нужно положить рабочие программы изучаемых в семестре дисциплин. Каждому обучающемуся следует составлять еженедельный и семестровый планы работы, а также план на каждый рабочий день. С вечера всегда надо распределять работу на завтрашний день. В конце каждого дня целесообразно подводить итог работы: тщательно проверить, все ли выполнено по намеченному плану, не было ли каких-либо отступлений, а если были, по какой причине это произошло. Нужно осуществлять самоконтроль, который является необходимым условием успешной учебы. Если что-то осталось невыполненным, необходимо изыскать время для завершения этой части работы, не уменьшая объема недельного плана.

Самостоятельная работа на лекции.

Слушание и запись лекций – сложный вид вузовской аудиторной работы. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность обучающегося. Краткие записи лекций, их конспектирование помогает усвоить учебный материал. Конспект является полезным тогда, когда записано самое существенное, основное и сделано это самим обучающимся. Не надо стремиться записать дословно всю лекцию. Такое «конспектирование» приносит больше вреда, чем пользы. Запись лекций рекомендуется вести по возможности собственными формулировками. Желательно запись осуществлять на одной странице, а следующую оставлять для проработки учебного материала самостоятельно в домашних условиях. Конспект лекции лучше подразделять на пункты, параграфы, соблюдая красную строку. Этому в большой степени будут способствовать пункты плана лекции, предложенные преподавателям. Принципиальные места, определения, формулы и другое следует сопровождать замечаниями «важно», «особо важно», «хорошо запомнить» и т.п. Можно делать это и с помощью разноцветных маркеров или ручек. Лучше если они будут собственными, чтобы не приходилось просить их у однокурсников и тем самым не отвлекать их во время лекции. Целесообразно разработать собственную «маркографию» (значки, символы), сокращения слов. Не лишним будет и изучение основ стенографии. Работая над конспектом лекций, всегда необходимо использовать не только учебник, но и ту литературу, которую дополнительно рекомендовал лектор. Именно такая серьезная, кропотливая работа с лекционным материалом позволит глубоко овладеть знаниями.

Подготовка к практическим занятиям.

Подготовку к каждому практическому занятию каждый обучающийся должен начать с ознакомления с планом практического занятия, который отражает содержание предложенной темы. Тщательное продумывание и изучение вопросов плана основывается на проработке текущего материала лекции, а затем изучения обязательной и дополнительной литературы, рекомендованную к данной теме. На основе индивидуальных предпочтений обучающемуся необходимо самостоятельно выбрать тему доклада по проблеме практического занятия и по возможности подготовить по нему презентацию. Если программой дисциплины предусмотрено выполнение практического задания, то его необходимо выполнить с учетом предложенной инструкции (устно или 10 письменно). Все новые понятия по изучаемой теме необходимо выучить наизусть и внести в глоссарий, который целесообразно вести с самого начала изучения курса. Результат такой работы должен проявиться в способности обучающегося свободно ответить на теоретические вопросы практического занятия, его выступлении и участии в коллективном обсуждении вопросов изучаемой темы, правильном выполнении практических заданий и контрольных работ.

Структура практического занятия:

В зависимости от содержания и количества отведенного времени на изучение каждой темы может практическое занятие состоять из четырех-пяти частей:

1. Обсуждение теоретических вопросов, определенных программой дисциплины.
2. Доклад и/ или выступление с презентациями по проблеме практического занятия.
3. Обсуждение выступлений по теме – дискуссия.
4. Выполнение практического задания с последующим разбором полученных результатов или обсуждение практического задания, выполненного дома, если это предусмотрено программой.
5. Подведение итогов занятия.

Первая часть – обсуждение теоретических вопросов - проводится в виде фронтальной беседы со всей группой и включает выборочную проверку преподавателем теоретических знаний обучающихся. Примерная продолжительность — до 15 минут. Вторая часть — выступление обучающихся с докладами, которые должны сопровождаться презентациями с целью усиления наглядности восприятия, по одному из вопросов практического занятия. Обязательный элемент доклада – представление и анализ статистических данных, обоснование социальных последствий любого экономического факта, явления или процесса. Примерная продолжительность — 20-25 минут. После докладов следует их обсуждение – дискуссия. В ходе этого этапа практического занятия могут быть заданы уточняющие вопросы к

докладчикам. Примерная продолжительность – до 15-20 минут. Если программой предусмотрено выполнение практического задания в рамках конкретной темы, то преподавателями определяется его содержание и дается время на его выполнение, а затем идет обсуждение результатов. Если практическое задание должно было быть выполнено дома, то на практическом занятии преподаватель проверяет его выполнение (устно или письменно). Примерная продолжительность – 15-20 минут. Подведением итогов заканчивается практическое занятие. Обучающимся должны быть объявлены оценки за работу и даны их четкие обоснования. Примерная продолжительность — 5 минут.

Работа с литературными источниками.

В процессе подготовки к практическим занятиям, обучающимся необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме. Более глубокому раскрытию вопросов способствует знакомство с дополнительной литературой, рекомендованной преподавателем, что позволяет обучающимся проявить свою индивидуальность в рамках выступления на занятиях, выявить широкий спектр мнений по изучаемой проблеме.

8. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети Интернет

8.1. Основная литература

1. Королев, А. В. Дифференциальные и разностные уравнения: учебник и практикум для вузов / А. В. Королев. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-9896-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/537155

2. Дифференциальные уравнения. Устойчивость и оптимальная стабилизация: учебное пособие для вузов / А. Н. Сесекин [и др.]; ответственный редактор А. Н. Сесекин ; под научной редакцией А. Ф. Шорикова. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 119 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08215-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL:

https://urait.ru/bcode/540373

8.2. Дополнительная литература

1. А. Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник: допущено М-вом образования РФ для студентов, обуч. по физико-математических направлениям и специальностям М.: КомКнига, 2007

2. А. Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005

8.3. Нормативные правовые документы и иная правовая информация

Не используются

8.4. Интернет-ресурсы

Не используются

9. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы

Требования к аудитории:
- Лекционные
- Семинарские
- Помещения для самостоятельной работы

Требования к оборудованию:
- Доска
- проектор
- ПК (стационарный) или ноутбук: операционная система: не ниже Windows 7 (или аналогичная по функциям)

Требования к программному обеспечению:
- пакет Microsoft Office